[149 :] Valeurs propres, vecteurs propres.
Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

→ Rapport du jury :

- Notion de vect./val. propres dans le cas général + utilisat° de techniques d'algèbre et d'analyse pour les trouver
- Exs. de matrices à élém^t propres remarquables (mat. compagnon / circulantes...)
- Connaître les limites du calcul exact
- Quelques méthodes itératives (dont on démontre la CV) pour trouver les élém. propres
- Norme matricielle + rayon spectral maîtrisé ! lien avec $X_{n+1} = AX_n$ CV illustré
- Localisat° des val. propres
- Méthode de la puissance ; puissance inverse ; QR
- Liens avec théorie des rep. et TF rapide ...

Dév :

1) Méthode QR [CIARLET]

2) Suite de polygones [PECATTE] ou ....

Réf :

- [ROM] + [ROM_Mat]
- [MAN]
- [GOU] ← peut être enlevé sûrement
- [CIA]

Idée plan : 149

I) Valeurs propres, vecteurs propres

ROM

A) Notion d'élém^t propres

déf, exs...

B) Polynôme KR

déf, prop, espaces propres (+ appli diago/trigo)

Dunford | dév 1 suite polygones

C) Lien avec les normes matricielles

mettre localisat° des v.p. Rom

(déf, exs, rayon spectral, $\rho(A) \leq |||A|||$
+ parler de résolut° de $Ax = b$ ... ← ? avec des suites)

ALL + CIA

ROM ? An mat ?

II) Calculs approchés d'élém^t propres

A) Méthode de la puissance

(à découvrir)

ALL + CIA

ROM An_mat ?

B) Méthode QR

regarder vidéo Caldero !!! ...

LU + Chol + déc QR (+ matrices de Householder ??)
+ Méthode QR

→ + calcul vecteur propre

- ROM + ROM An_Mat
- ALL
- GRI
- H2G2

149 : Valeurs propres, vect. propres

I) Valeurs propres, vecteurs propres :

A) Notion d'éléments propres :

[MAN]

Suivre [MAN] de p. 51-54
+ mettre des exs.

B) Polyn. KR et appli à la réd :

[MAN]

suivre [MAN] p. 54-56

• χ_u scindé à rac simples ⇒ u diago

+ Appli : $u \in \mathcal{L}(E)$ diago ⇔ avec χ_u ...

[MAN] diago

[+ avec Cayley ⇒ critère avec Π_u] ?

+ Prop : $\chi_{\mathcal{C}(P)} = P \; (= \Pi_P)$

[GOU] [PEC]

Lemme : déterminant matrice circulante

Appli : suite de polygones — Dév 1

C) Lien avec les normes matricielles

Déf : norme matricielle induite) [ROM_Mat]

Ex ?

THM : Gerschgörin-Hadamard + corollaire !

Appli : exo 20.10 [ROM]

Déf : rayon spectral

Thm : $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$

THM : $\rho(A) = \inf_{|||\cdot|||} |||A|||$

THM avec les suite $A^k \to 0$, $\rho(A) < 1$ ... — pt ① à ④ ou ...

↳ voir si je rajoute des trucs avec [ROM_Mat] NON

II) Méthodes effectives de réduction

A) Méthode pour diago-trigo

[GOU]

↳ expliquer méthodes pas à pas → diago :
- calcul des v.p via χ_u
- calcul de $E_\lambda(u)$ avec système
- $P = (\dots)$

→ trigo : expliquer récurrence

B) ~~Réduct~~ Déc de Dunford

[GOU] [ROM] [MAN]

Thm + $\boxed{\text{explications étapes}}$ [GOU] ou [ROM] ? oui + $\boxed{\text{applis exp de mat + critère de diago}}$ [ROM]

III) Calculs approchés d'élém^t propres : $\|\cdot\|$ norme de $\mathbb{R}^n$

A) Méthode de la puissance : $n \geq 2$

[ROM Mat] p. 209 213 [ROM]

THM : $A \in M_n(\mathbb{R})$ tq la valeur propre λ_1 de module max est unique. Cette valeur propre est réelle simple, on a $\mathbb{R}^n = \underbrace{\ker(A - \lambda_1 I_n)}_{\text{droite vect.}} \oplus \mathrm{Im}(A - \lambda_1 I_n)$ et $\mathrm{Im}(A - \lambda_1 I_n)$ stable par A.

THM : Avec les hypothèses précédentes, on note $E_1 = \ker(A - \lambda_1 I_n)$, $F_1 = \mathrm{Im}(A - \lambda_1 I_n)$ on définit $(x^{(k)})_k \subset \mathbb{R}^n$: $\begin{cases} x^{(0)} = e_1 + f_1, \; e_1 \in E_1 \setminus \{0\}, \; f_1 \in F_1 \\ x^{(k+1)} = \dfrac{1}{\|Ax^{(k)}\|} A x^{(k)} \end{cases}$ on prend $x^{(0)}$ quelco et on espère tomber bien en fait

On a : • $\|Ax^{(k)}\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} |\lambda_1| = \rho(A)$

• $x^{(2k)} \to v_1$, $x^{(2k+1)} \to v_2 = \mathrm{sign}(\lambda_1) v_1$ où $v_1 \in E_1 \setminus \{0\}$

• $\forall j \in [\![1;n]\!]$ tq $e_{1,j} \neq 0$, on a $\dfrac{(Ax^{(k)})_j}{x^{(k)}_j} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \lambda_1$

Rem : Si les vp de A vérifient $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n|$ pour $e_1 \in E_1 \setminus \{0\}$ tq $\|e_1\|_2 = 1$, $A - \lambda_1 e_1 {}^t e_1$ est de valeurs propres $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. On applique le thm précédent à cette matrice pour obtenir λ_2 et on recommence. + remarque sur méthode puissance inverse

B) Méthode QR

[CIA] p. 90 93
- → déf matrice Householder + lemme $H_a = \begin{pmatrix} \|a\|_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- → Thm déc QR + rem Gram-Schmidt [ROM_Mat] + exemples simples ?

[CIA] p. 124 131
- → énoncé de la méthode QR
- → Thm CV ← dév 2
- → rem sur approx vecteur propre ? avec méthode de la puissance inverse